

Chapitre III

*Commande adaptative floue par mode
glissant des systèmes non linéaires
d'ordre fractionnaire avec un signe de
gain connu et/ou inconnu*

CHAPITRE III

Commande adaptative floue par mode glissant des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire Avec un signe de gain connu et/ou inconnu

III.1. Introduction

Le développement d'une loi de commande pour un système donné suppose la disponibilité de modèle mathématique. Cependant l'obtention de ce modèle est généralement une opération qui n'est pas facile. Pour contourner ce problème, l'approximation du modèle ou de la loi de commande peut être une alternative.

Ce type de commande ne permet pas de garantir de bonnes performances de poursuite en présence des perturbations externes ou des variations structurelles. D'où, la nécessité de robustifier ces structures de commande. La commande par mode glissant peut être une alternative à ce problème, en raison de sa robustesse vis-à-vis des incertitudes et des perturbations externes. [1]

Dans ce chapitre est de présenter deux commandes adaptatives floues par mode glissant, la première commande proposée, est développée pour une classe des systèmes SISO non linéaires d'ordre fractionnaire inconnus avec un signe de gain de commande connu. la seconde commande proposée, est développée pour une classe des systèmes SISO non linéaires d'ordre fractionnaire inconnus avec un signe de gain de commande inconnu, on utilise la fonction de Nussbaum pour estimer le signe de gain de commande, et les lois d'adaptation des paramètres ajustables sont déduites de la synthèse de Lyapunov.

III.2. Rappel sur la commande adaptative floue par mode glissant des systèmes non linéaire d'ordre fractionnaire avec un signe de gain connu

III.2.1. Position du problème

Considérons une classe des systèmes non linéaires SISO d'ordre (nq) comme suit [16]:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(nq)} = f(x, t) + g(x, t)u + d(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T$ est le vecteur d'état de ce système, $u \in R$ est l'entrée de commande du système, $y \in R$ est sa sortie,

$f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont des fonctions non linéaires continues inconnues, $d(t)$ présente la perturbation externe inconnue.

Comme dans [4], [15] et [17], les hypothèses suivantes sont connues, continues et bornées.

Hypothèse 3.3 : La perturbation externe est bornée : $|d(t)| \leq D$ avec D est une constante positive inconnue.

Remarque 3.1 : Le gain de commande $g(x, t) \neq 0$, dans l'hypothèse 3.1, impose une sorte de condition de commandabilité pour les systèmes (3.1).

L'objectif consiste à déterminer une loi de commande assurant la bornitude de tous les signaux du système et la poursuite pour la sortie d'une trajectoire de référence en présence d'incertitudes de modèle et des perturbations externes.

$e = y - y_d = [e, e^{(q)}, \dots, e^{((n-1)q)}]^T \in R^n$, est le vecteur des erreurs de poursuite.

$$e^{(nq)} + k_1 e^{((n-1)q)} + \dots + k_n e = 0 \quad (3.2)$$

En général, dans l'espace d'état de l'erreur la surface de glissement est définie par

$$s(x, t) = -(ke) = -(k_1 e + k_2 e^{(q)} + \dots + k_{n-1} e^{(n-2)q} + e^{(n-1)q}) \quad (3.3)$$

Où $\underline{k} = [k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, 1] \in R^n$ où les k_i sont toutes des réelles et sont choisies de telle sorte que $h(r) = \sum_{i=1}^n k_i r^{(i-1)q}$, $k_n = 1$ est un polynôme Hurwitz où r est l'opérateur de Laplace.

Le problème de poursuite sera considéré comme le vecteur d'état d'erreur e qui reste sur la surface de glissement $s(x, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Le processus de commande en mode glissant peut être classé en deux phases, la phase approchante avec $s(x, t) \neq 0$ et la phase de glissement avec $s(x, t) = 0$ pour l'erreur initiale $e(0) = 0$. Afin de garantir que la trajectoire du vecteur d'état d'erreur e se traduira à partir de la phase approchante de la phase de glissement, la condition suffisante [20], [21]

$$s(x, t) s^{(q)}(x, t) \leq -\eta, \text{ où } \eta > 0 \quad (3.3)$$

doit être satisfaite.

Deux types de lois de commande doit être tirés séparément pour ces deux phases décrites ci-dessus. Dans la phase de glissement, elle implique $s(x, t) = 0$ et $s^{(q)}(x, t) = 0$. [22]

Afin de forcer la dynamique du système à rester sur la surface de glissement, la commande équivalente $\bar{u}$ peut être calculée comme suit,

Si $f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont connues avec la perturbation externe nulle, c.à.d. $d(t) = 0$, en prenant la dérivée de la surface de glissement par rapport au temps, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 s^{(q)} &= - \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + e^{(nq)} \right) = - \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + y_d^{(nq)} - y^{(nq)} \right) \\
 &= - \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} - f(x, t) - g(x, t) \bar{u} \right) - y_d^{(nq)} \\
 &= - \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} \right) + f(x, t) + g(x, t) \bar{u} - y_d^{(nq)} = 0
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Par conséquent, la commande équivalente peut être obtenue comme

$$\bar{u} = \frac{1}{g(x, t)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} - f(x, t) + y_d^{(nq)} \right) \tag{3.5}$$

Au contraire, dans la phase approchante, $s(\underline{x}, t) \neq 0$ un type s'approche de contrôle u_{ap} doit être ajouté afin de satisfaire à la condition suffisante (3.3) et la commande par mode de glissement complète sera exprimée comme

$$u = \bar{u} - u_{ap} \quad , \quad u_{ap} = \psi_h \text{sgn}(s) \tag{3.6}$$

où $\psi_h \geq \eta > 0$.

De plus, la commande PI fractionnaire a été utilisée pour éviter le problème de phénomène de Chattering. L'entrée et la sortie du régulateur PI est sous la forme suivante [4], [15] et [17]:

$$u_h = h(s|\theta_h) = \theta_{h_1} z_1 + \theta_{h_2} z_2 \tag{3.7}$$

où $z_1 = s$ et $z_2 = s^{(q)}$, θ_{h_1} et θ_{h_2} sont les gains de commande à concevoir.

L'équation (3.7) peut être réécrite comme :

$$h(s|\theta_h) = \xi(s) \theta_h^T \tag{3.8}$$

où $\xi^T(s) = [s, s^{(q)}] \in \mathcal{R}^2$ et $\theta_h = [\theta_{h_1}, \theta_{h_2}]^T \in \mathcal{R}^2$ est un vecteur des paramètres réglables.

La loi de commande résultante, qui comprenne un système flou pour approximer les fonctions inconnues $f(\underline{x})$, $g(\underline{x})$ et un régulateur PI-fractionnaire qui permet d'atténuer le Chattering et améliorer les performances, est le suivant [16] et [23] :

$$u(x) = \frac{1}{g(x|\theta_g)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + y_d^{(nq)} - f(x|\theta_f) - h(s|\theta_h) \right) \tag{3.9}$$

La commande de commutation u_{ap} est remplacée par l'action du contrôleur PI pour éviter le problème Chattering où l'état est à l'intérieur d'une couche limitée $|s(x, t)| < \phi$; l'action de commande est maintenu à la valeur saturée lorsque l'état est en dehors de la couche limite.

Par conséquent, $|h(s|\theta_h)| = D + \psi_h + \omega_{max}$ lorsque $s(x, t)$ se situe en dehors de la couche limite c.-à-d. $|s(x, t)| \geq \phi$, où ϕ est l'épaisseur de cette couche.

Pour obtenir la commande de mode de glissement (3.6), les fonctions $f(x, t), g(x, t)$ du système et le paramètre de commutation ψ_h doivent connues à l'avance.

Cependant, $f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont inconnues et la perturbation externe $d(t) \neq 0$, l'effort de la commande idéale (3.5) ne peuvent pas être mise en œuvre (n'est pas réalisable). Nous remplaçons $f(x, t), g(x, t)$ et u_{ap} par les systèmes flous $f(x|\theta_f), g(x|\theta_g)$ et $h(s|\theta_h)$ sous les formes spécifiés comme, [21]

$$f(x|\theta_f) = \xi(x)\theta_f^T, \quad g(x|\theta_g) = \xi(x)\theta_g^T \text{ et } h(s|\theta_h) = \xi(s)\theta_h^T \quad (3.10)$$

$$\theta_f^{(q)} = r_1 s \xi(x), \quad (3.11)$$

$$\theta_g^{(q)} = r_2 s \xi(x) u(x), \quad (3.12)$$

$$\theta_h^{(q)} = r_3 s \xi(s), \quad (3.13)$$

On a $|h(s|\theta_h)| = D + \psi_h + \omega_{max}$ lorsque $s(x, t)$ se situe en dehors de la couche limite c.-à-d. $|s(x, t)| \geq \phi$, où ϕ est l'épaisseur de cette couche. [23]

Ici, les fonctions floues de base $\xi(x)$ et $\xi(s)$ dépendent des fonctions d'appartenance floues et est censé être fixées, tandis que θ_f, θ_g et θ_h sont réglés par les lois d'adaptations qui sont basées sur le critère de stabilité de Lyapunov. [18]

Les vecteurs des paramètres optimaux θ_f^*, θ_g^* et θ_h^* sont définis par

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f \in \Omega_f} [\sup_{x \in \Omega_x} |f(x|\theta_f) - f(x, t)|] \quad (3.14)$$

$$\theta_g^* = \arg \min_{\theta_g \in \Omega_g} [\sup_{x \in \Omega_x} |g(x|\theta_g) - g(x, t)|] \quad (3.15)$$

$$\theta_h^* = \arg \min_{\theta_h \in \Omega_h} [\sup_{x \in \Omega_x} |h(s|\theta_h) - u_{ap}|] \quad (3.16)$$

Où $\Omega_f, \Omega_g, \Omega_h$ et Ω_x sont des ensembles de contraintes pour $\theta_f, \theta_g, \theta_h$ et x respectivement et elles sont définies comme,

$$\Omega_f = \{\theta_f | |\theta_f| \leq M_f\},$$

$$\Omega_g = \{\theta_g | |\theta_g| \leq M_g\},$$

$$\Omega_h = \{\theta_h | |\theta_h| \leq M_h\}$$

$$\Omega_x = \{x | |x| \leq M_x\},$$

Où M_f, M_g, M_h et M_x sont des constantes positives.

$$\begin{aligned}
 s^{(q)} &= -\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + e^{(nq)}\right) = -\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + y_d^{(nq)} - y^{(nq)}\right). \\
 &= -\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} - f(x, t) - g(x, t)u\right) - y_d^{(nq)}. \\
 &= -\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)}\right) + f(x, t) - f(x|\theta_f) + \left(g(x, t) - g(x|\theta_g)\right)u - \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} - \\
 &\quad h s \theta_h + d(t). \\
 &= f(x, t) - f(x|\theta_f) + \left(g(x, t) - g(x|\theta_g)\right)u - h(s|\theta_h) + d(t) + \omega. \\
 &= f(x|\theta_f^*) - f(x|\theta_f) + \left(g(x|\theta_g^*) - g(x|\theta_g)\right)u - h(s|\theta_h) + h(s|\theta_h^*) - h(s|\theta_h^*) + d(t) + \\
 &\quad \omega. \\
 &\phi_f^T \xi(x) + \phi_g^T \xi(x)u + \phi_h^T \xi(x) - h(s|\theta_h^*) + d(t) + \omega.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Où $\omega = f(x, t) - f(x|\theta_f) + \left(g(x, t) - g(x|\theta_g)\right)u$.

$\phi_f = \theta_f^* - \theta_f, \phi_g = \theta_g^* - \theta_g$ et $\phi_h = \theta_h^* - \theta_h$.

III.3.2. Analyse de la stabilité

Afin d'analyser la stabilité en boucle fermée, la fonction de Lyapunov est choisie comme [16]

$$V = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2r_1} \phi_f^T \phi_f + \frac{1}{2r_2} \phi_g^T \phi_g + \frac{1}{2r_3} \phi_h^T \phi_h. \tag{3.18}$$

En prenant la dérivée (3.18) par rapport au temps, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 V^{(q)} &= s s^{(q)} + \frac{1}{r_1} \phi_f^T \phi_f^{(q)} + \frac{1}{r_2} \phi_g^T \phi_g^{(q)} + \frac{1}{r_3} \phi_h^T \phi_h^{(q)}. \\
 &= s \left(\phi_f^T \xi(x) + \phi_f^T \phi_f^{(q)} + \phi_h^T \xi(s) - h(s|\theta_h^*) + \omega + d(t) \right) + \frac{1}{r_1} \phi_f^T \phi_f^{(q)} + \frac{1}{r_2} \phi_g^T \phi_g^{(q)} + \\
 &\quad \frac{1}{r_3} \phi_h^T \phi_h^{(q)}. \\
 &= s \phi_f^T \xi(x) + \frac{1}{r_1} \phi_f^T \phi_f^{(q)} + s \phi_f^T \phi_f^{(q)} + \frac{1}{r_2} \phi_g^T \phi_g^{(q)} + s \phi_h^T \xi(s) + \frac{1}{r_3} \phi_h^T \phi_h^{(q)} - s h(s|\theta_h^*) + \\
 &\quad s \omega + s d(t). \\
 &= \frac{1}{r_1} \phi_f^T \left(r_1 s \xi(x) + \phi_f^{(q)} \right) + \frac{1}{r_2} \phi_g^T \left(r_2 s \xi(x)u + \phi_g^{(q)} \right) + \frac{1}{r_3} \phi_h^T \left(s \xi(s) + \phi_h^{(q)} \right) - \\
 &\quad s h(s|\theta_h^*) + s(\omega + d(t)).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{r_1} \phi_f^T (r_1 s \xi(x) + \phi_f^{(q)}) + \frac{1}{r_2} \phi_g^T (r_2 s \xi(x) u + \phi_g^{(q)}) + \frac{1}{r_3} \phi_h^T (s \xi(s) + \phi_h^{(q)}) - \\
 &s(D + \psi_h) \operatorname{sgn}(s) + s d(t) + s \omega \\
 &< \frac{1}{r_1} \phi_f^T (r_1 s \xi(x) + \phi_f^{(q)}) + \frac{1}{r_2} \phi_g^T (r_2 s \xi(x) u + \phi_g^{(q)}) + \frac{1}{r_3} \phi_h^T (s \xi(s) + \phi_h^{(q)}) - \psi_h |s| + \\
 &s \omega.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

où $\phi_f^{(q)} = -\theta_f^{(q)}$, $\phi_g^{(q)} = -\theta_g^{(q)}$ et $\phi_h^{(q)} = -\theta_h^{(q)}$.

Avec le compensateur robuste u_{ap} et les lois d'adaptations floues sont données (3.11), (3.12) et (3.13), et après une simple manipulation, nous avons [16]

$$\begin{aligned}
 V^{(q)} &\leq s \omega - s \psi_h \operatorname{sgn}(s) = s \omega - |s| \psi_h \\
 V^{(q)} &\leq |s| |\omega| - s \psi_h \leq \psi_h |\omega| - |s| \psi_h
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Par l'utilisation du corollaire du lemme de *Barbalat*, [23] et [24], nous avons $\lim_{t \rightarrow \infty} |s(x, t)| = 0$. alors $\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$. La preuve est complète.

Pour ajuster le vecteur de paramètres θ_f :

$$\begin{aligned}
 \theta_f^{(q)} &= r_1 s \xi(x) \text{ si } (|\theta_f| < M_f) \text{ ou } (|\theta_f| = M_f \text{ et } s \xi(x) \theta_f^T \leq 0) \\
 &P_f[r_1 s \xi(x)] \text{ si } (|\theta_f| = M_f) \text{ et } s \theta_f^T \xi(x) > 0
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Pour ajuster le vecteur de paramètres θ_g :

$$\begin{aligned}
 \theta_g^{(q)} &= r_2 s \xi(x) \text{ si } (|\theta_g| < M_g) \text{ ou } (|\theta_g| = M_g \text{ et } s \xi(x) \theta_g^T u \leq 0) \\
 &P_g[r_2 s \xi(x) u] \text{ si } (|\theta_g| = M_g) \text{ et } s \theta_g^T \xi(x) u > 0
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Pour ajuster le vecteur de paramètres θ_h :

$$\begin{aligned}
 \theta_h^{(q)} &= r_3 s \xi(s) \text{ si } (|\theta_h| < M_h) \text{ ou } (|\theta_h| = M_h \text{ et } s \xi(s) \theta_h^T \geq 0) \\
 &P_h[r_3 s \xi(s)] \text{ si } (|\theta_h| = M_h) \text{ et } s \theta_h^T \xi(s) < 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Le schéma de la commande proposée est donné comme suit (fig. III.1) :

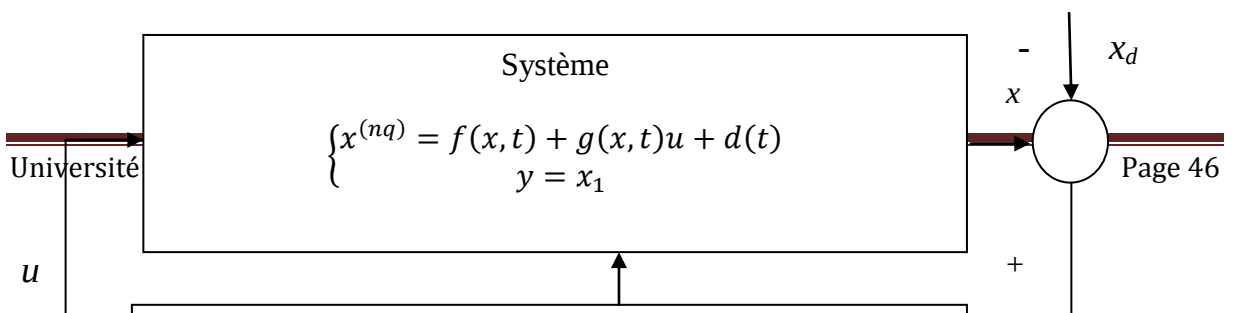


Fig. III.1 : Schéma général de la commande adaptative floue par mode glissant avec signe de gain de commande connu.

III.3.3. Résultats de simulation

A) Exemple

Pour illustrer les performances de cette approche de commande proposée, on considère deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire de *Duffing* comme suit, [18]

Le premier est un système de réponse

$$D^q x_1 = x_2$$

$$D^q x_2 = x_1 - 1.8x_2 - x_1^2 + 0.9 \cos(t) + u(t) + d(t).$$

Le second est le système référence (de commande)

$$D^q y_1 = y_2$$

$$D^q y_2 = 1.2y_1 - y_2 - y_1^2 + 0.5 \cos(t).$$

Les conditions initiales sont choisies comme suit $y(0) = [0, 0]^T$ et $x(0) = [1, -1]^T$ respectivement. On considère dans ce cas l'ordre fractionnaire $q = 0.98$, où la perturbation externe $d(t) = 0.1 \sin(t)$.

Pour les autres constantes de conception sont fixées comme suit $k_1 = k_2 = 1$, $r_1 = 200$, $r_2 = 40$, $h = 0.01$ et $T_{sim} = 40s$, $r_3 = 100$,

La figure (III.2) illustre le plan de phase des systèmes sans la commande étudiée

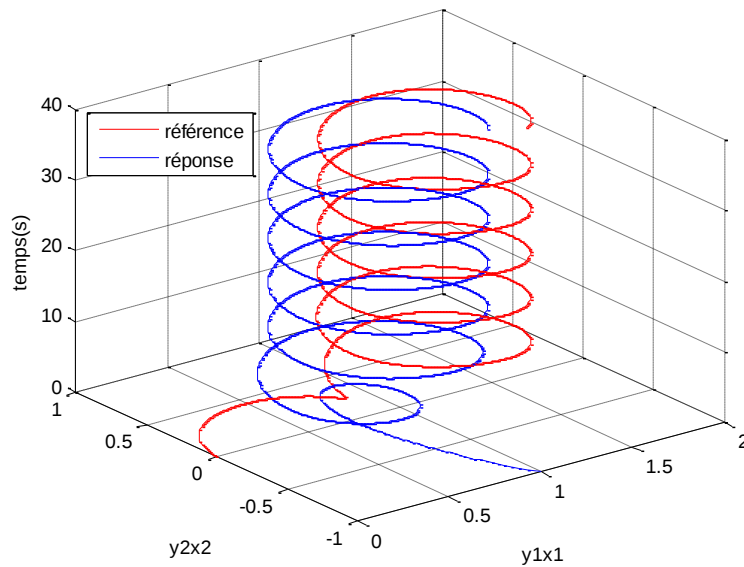


Fig. III.2 : Plan de phase des systèmes chaotiques sans loi de commande.

La figure (III. 3) illustre la synchronisation des systèmes avec la commande étudiée

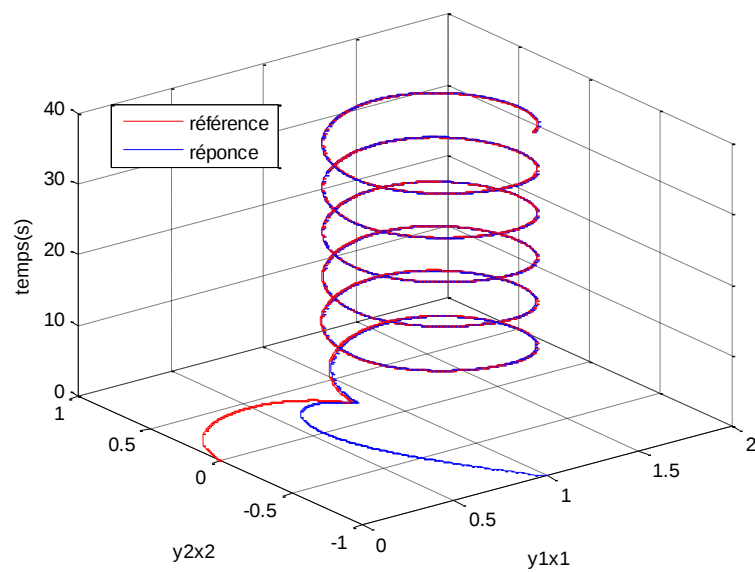
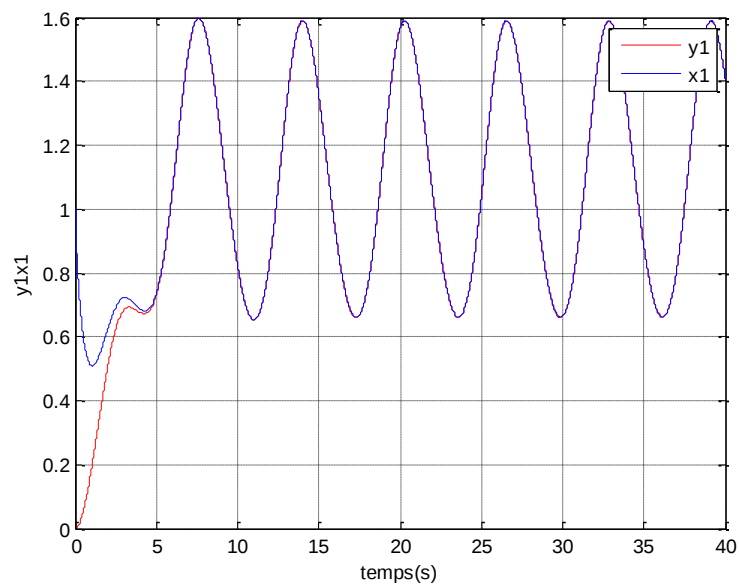
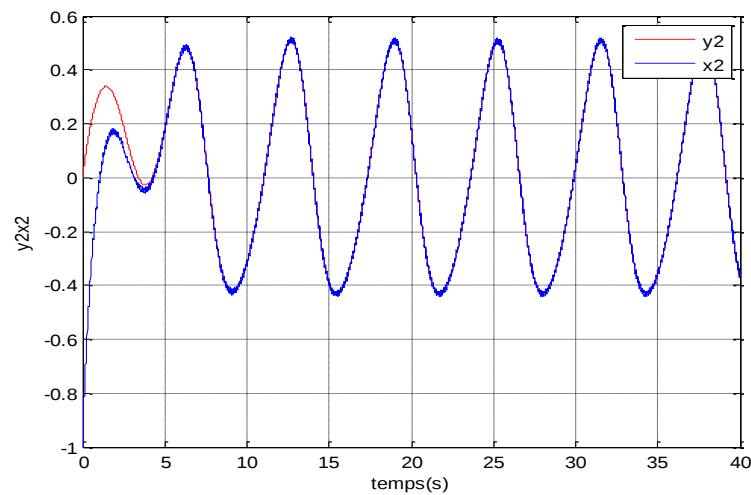
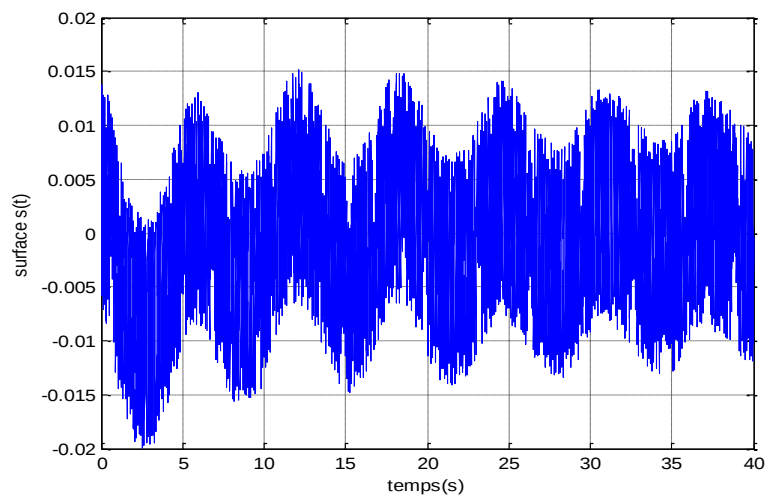
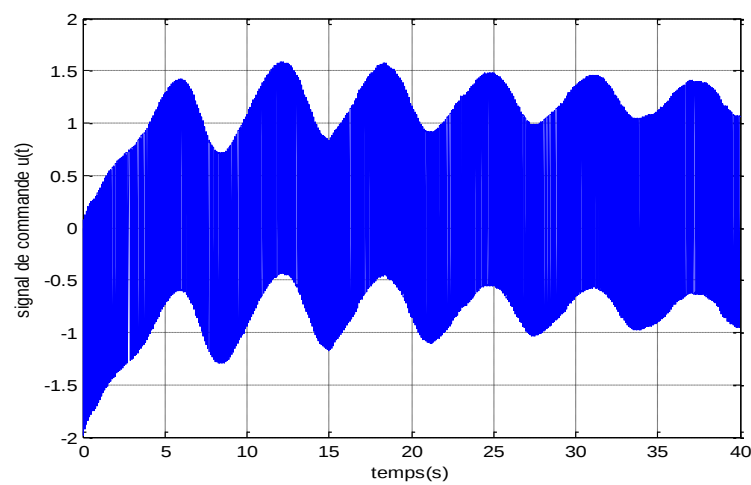
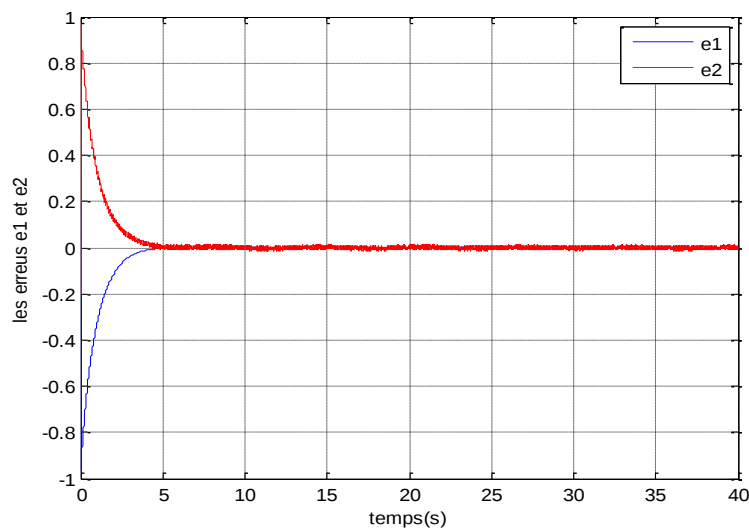


Fig. III.3 : Synchronisation des systèmes chaotiques avec loi de commande.



(a). Trajectoires des états x_1 et y_1 .

(b). Trajectoires des états x_2 et y_2 .(c). Surface $S(t)$.(d). Signal de commande $u(t)$.

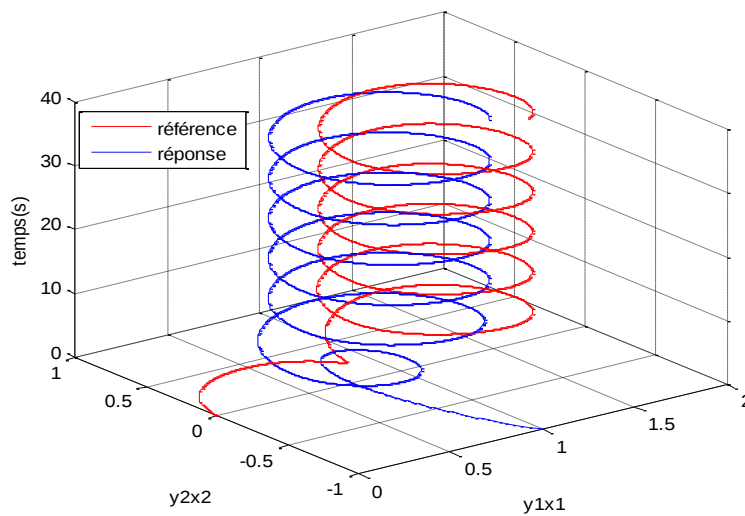


(e). L'erreurs e1 et e2.

Fig. III.4 : Résultats de simulation avec la loi de commande étudiée.

1. Le cas d'élimination de Chattering par l'utilisation du régulateur PI-fractionnaire.

La figure (III. 5) illustre la synchronisation des systèmes sans la commande étudiée

**Fig. III.5** : Plan de phase des systèmes chaotiques sans loi de commande avec PI.

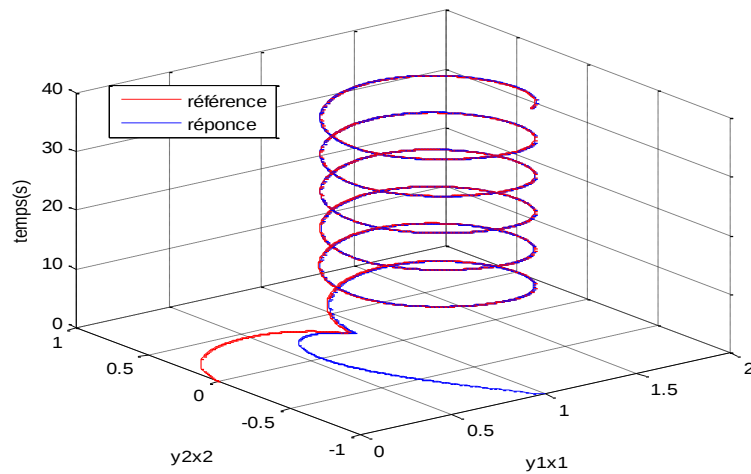
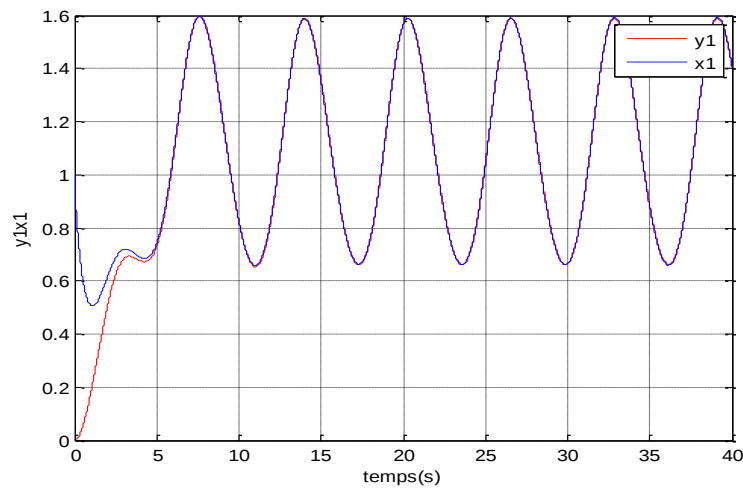
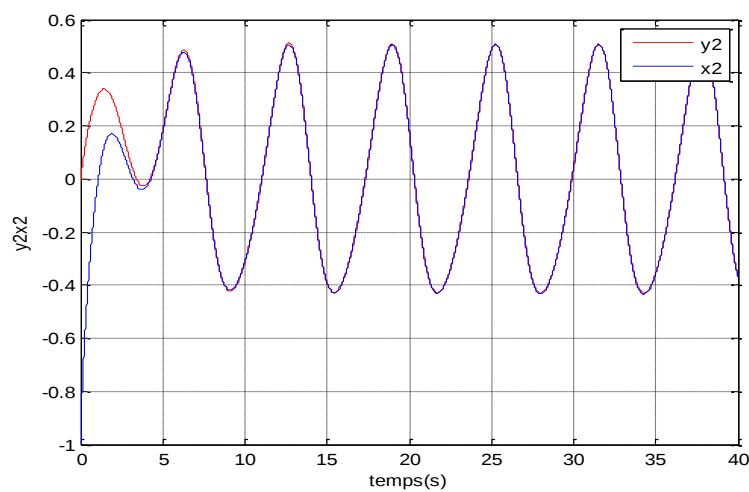


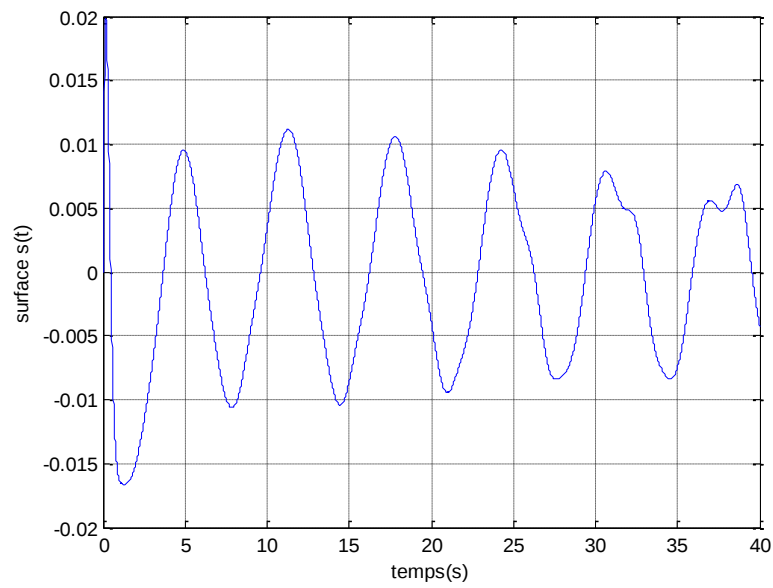
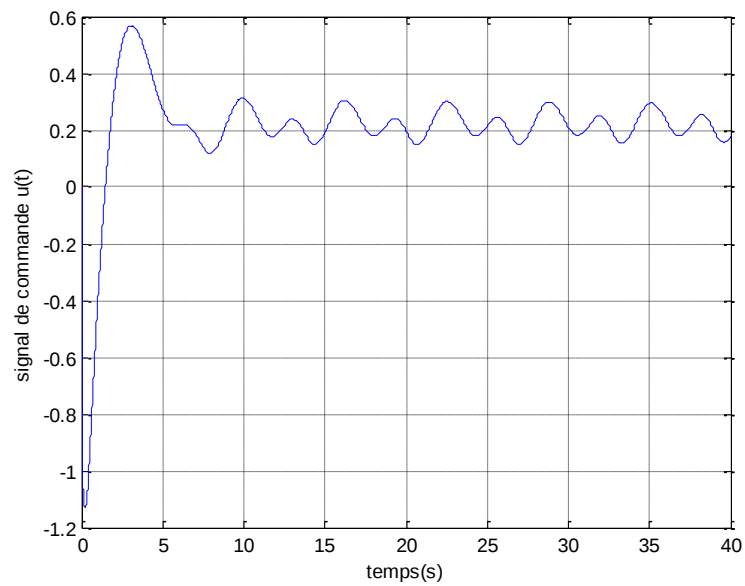
Fig. III.6 : Synchronisation des systèmes chaotiques avec commande avec PI.

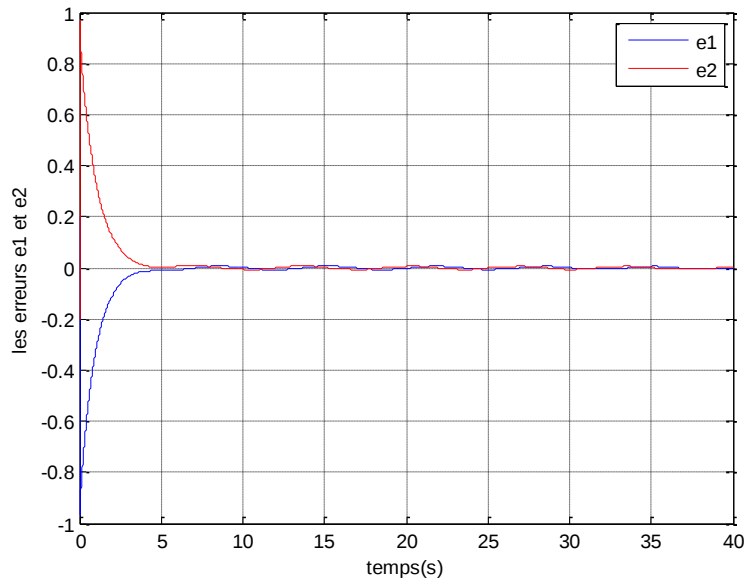


(a). Trajectoires des états x_1 et y_1 .



(a). Trajectoires des états x_2 et y_2 .

(c). Surface $S(t)$.(d). Signal de commande $u(t)$.

(e). L'erreurs $e1(t)$ et $e2(t)$.**Fig. III.7 :** Résultats de simulation avec la loi de commande étudiée avec PI.**B) Exemple**

Pour illustrer les performances de cette approche de commande proposée, on considère deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire comme suit, [19]

Le premier est un système de réponse

$$D^q x_1 = x_2$$

$$D^q x_2 = -\frac{100}{4}x_1 + \frac{1}{12}x_1^3 - 0.7x_2 - 0.08x_2^3 + \sin(x_1) + 33 \sin(2t)x_1 - \frac{1}{6}x_1^3 - 0.1\sin(x_1) + d(t) + u(t).$$

Le second est le système référence

$$D^q y_1 = y_2$$

$$D^q y_2 = -\frac{100}{4}y_1 + \frac{1}{12}y_1^3 - 0.5y_2 - 0.05y_2^3 + \sin(y_1) + 35.5 \sin(2t)y_1 - \frac{1}{6}y_1^3 + d(t).$$

Les conditions initiales sont choisies comme suit $y(0) = [0.25, 0.25]^T$ et $x(0) = [0.2, 0.2]^T$ respectivement. On considère dans ce cas l'ordre fractionnaire $q = 0.98$, où la perturbation externe $d(t) = 0.1\sin(t)$.

Pour les autres constantes de conception sont fixées comme suit $k_1 = k_2 = 1$, $r_1 = 200$, $r_2 = 40$, $r_3 = 100$, $r_4 = 10$, $h = 0.01$ et $T_{sim} = 40s$.

La figure (III. 5) illustre plan de phase des systèmes sans la commande étudiée.

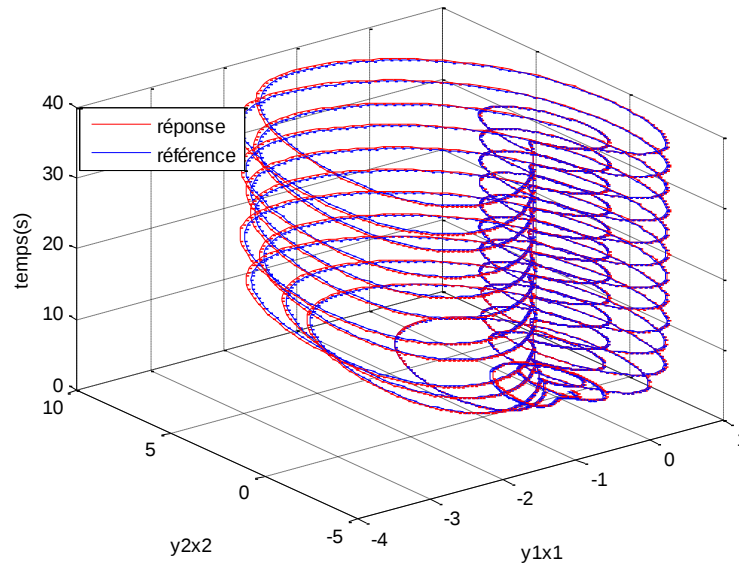


Fig. III.8: Plan de phase des systèmes sans commande étudiée.

La figure (III.9) illustre la synchronisation des systèmes avec la commande étudiée.

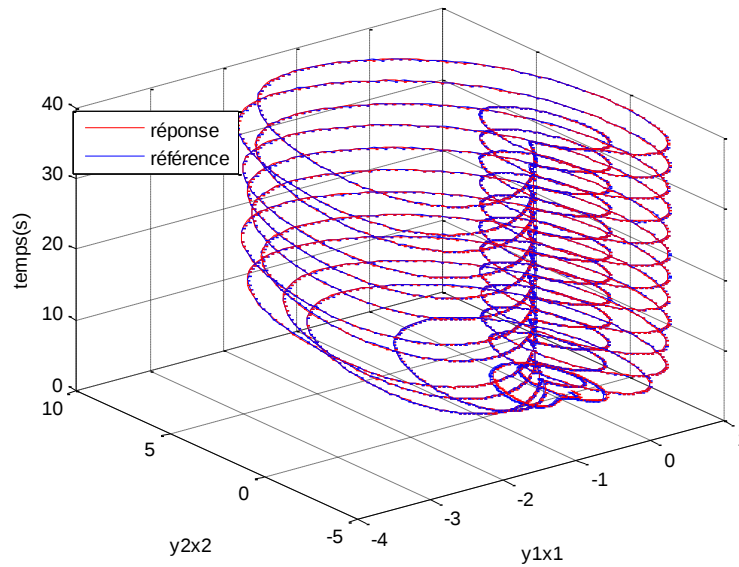
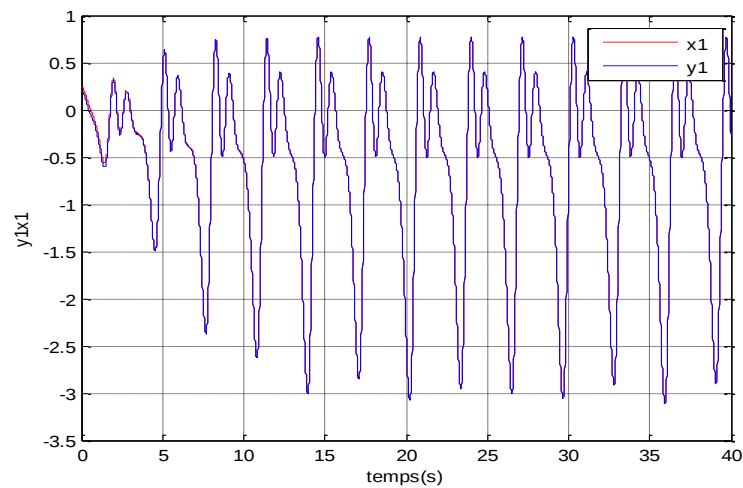
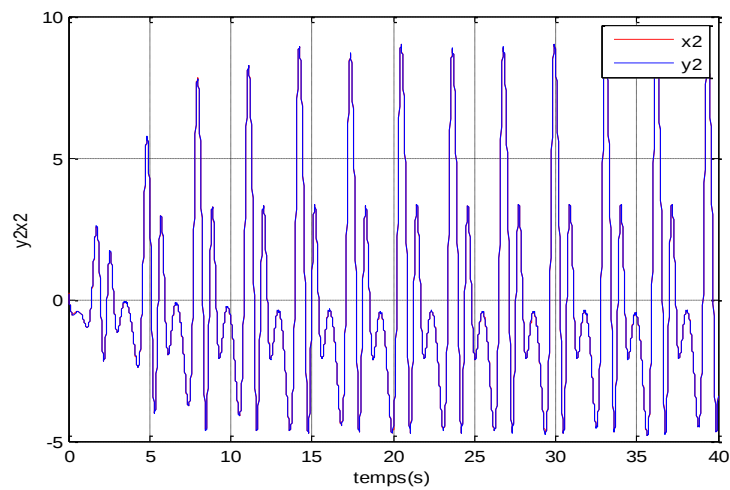
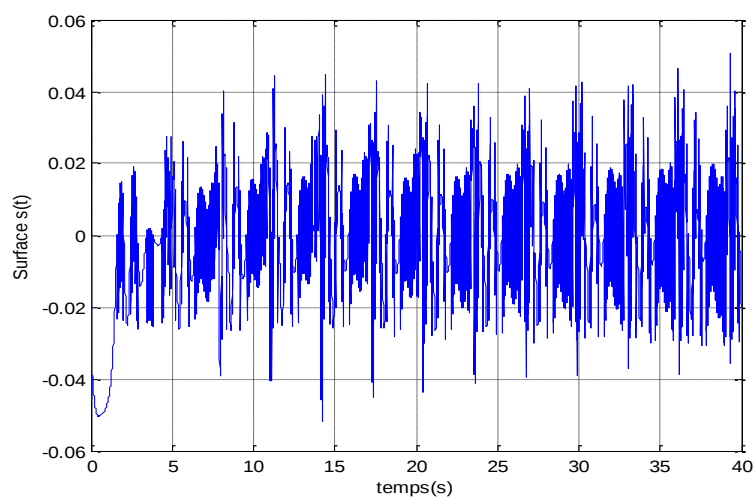
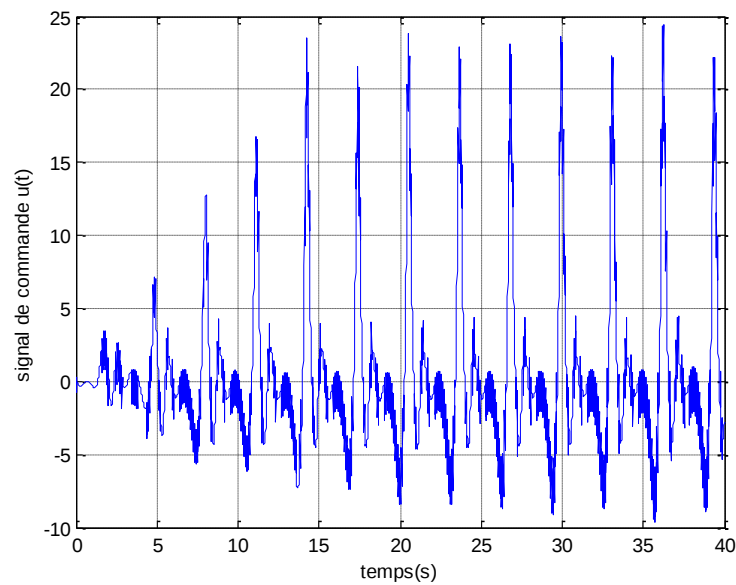
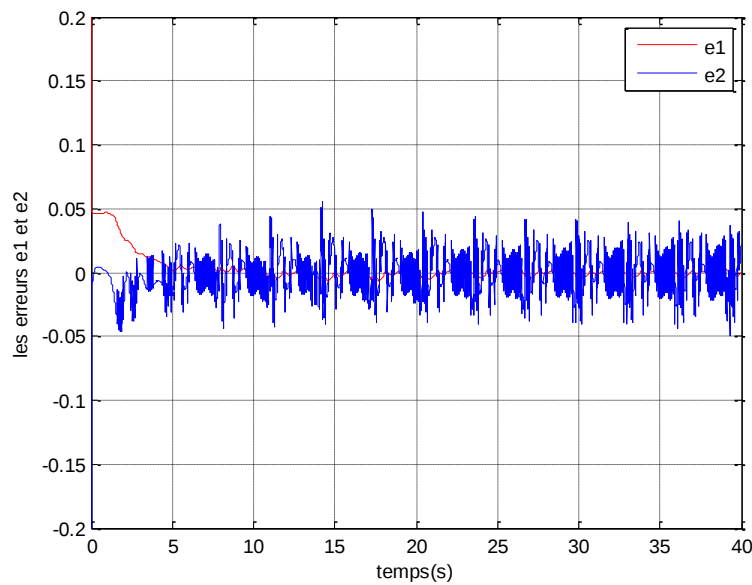


Fig. III.9 : Synchronisation des systèmes avec la commande étudiée.

(a). Trajectoires des états y_1 et x_1 .(b). Trajectoires des états y_2 et x_2 .(c). Surface $S(t)$.

(d). Signal de commande $u(t)$.(e). Erreurs $e1(t)$ et $e2(t)$.**Fig. III.10** : Résultats de simulation avec la loi de commande étudiée.

1. Le cas d'élimination de Chattering par l'utilisation d'un régulateur PI-fractionnaire.

La figure (III. 11) illustre plan de phase des systèmes sans la commande étudiée.

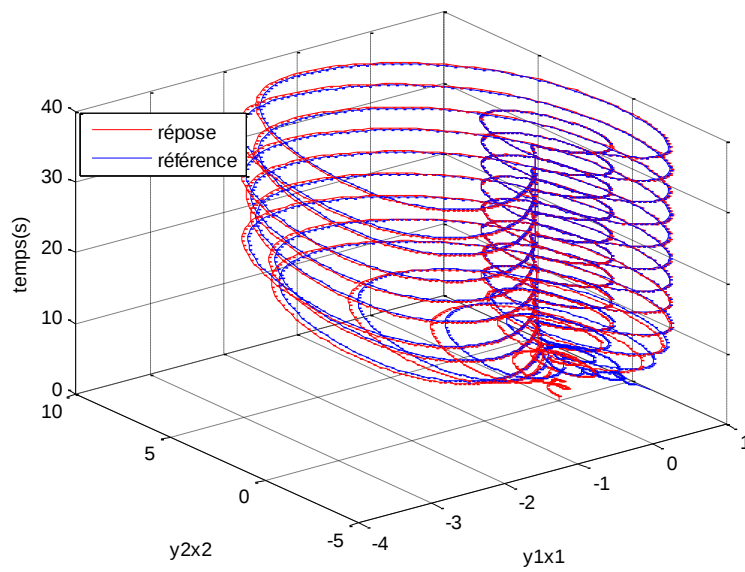


Fig. III.11 : Plan de phase des systèmes sans la commande étudiée avec PI.

La figure (III. 9) illustre la synchronisation des systèmes avec la commande étudiée

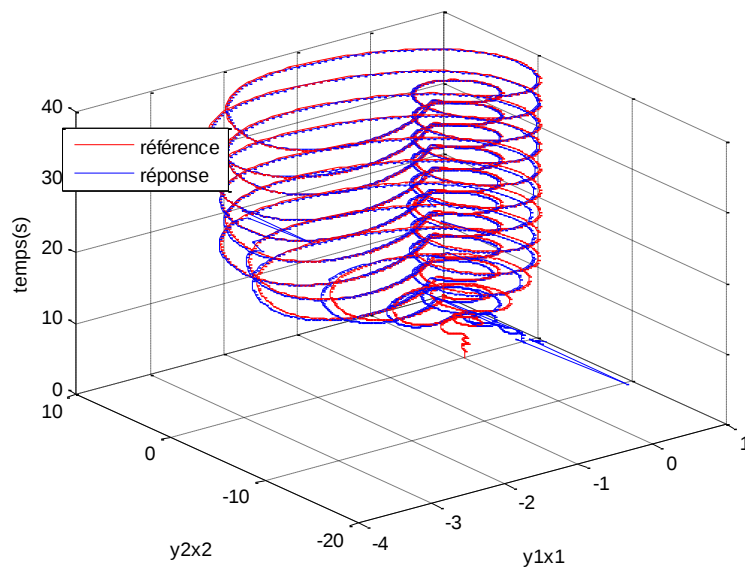
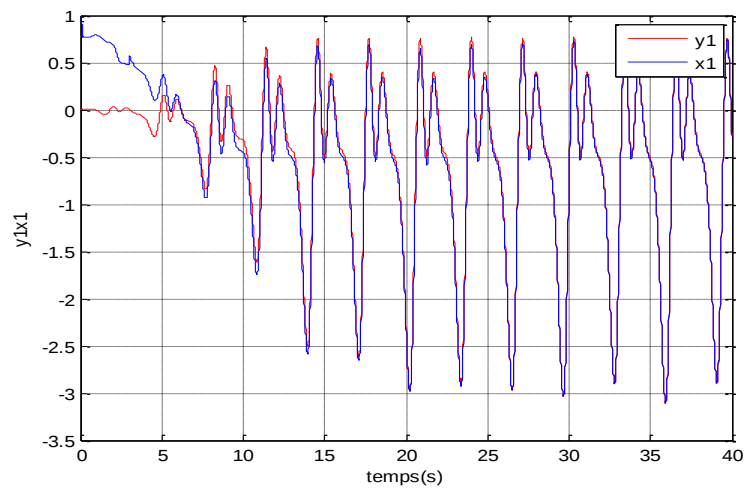
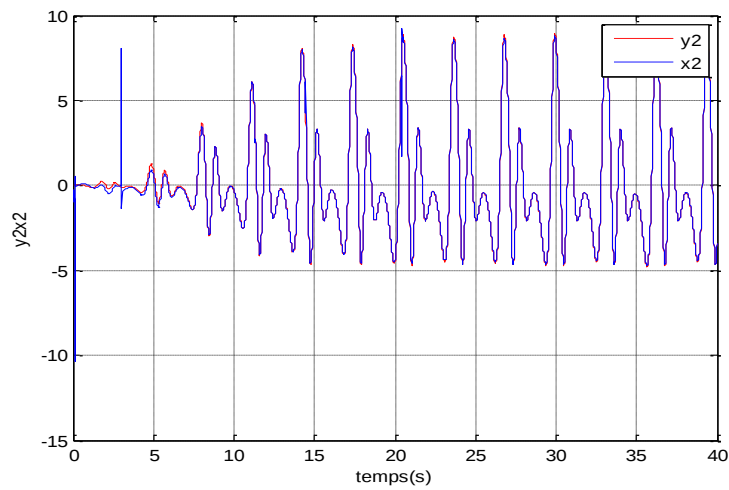
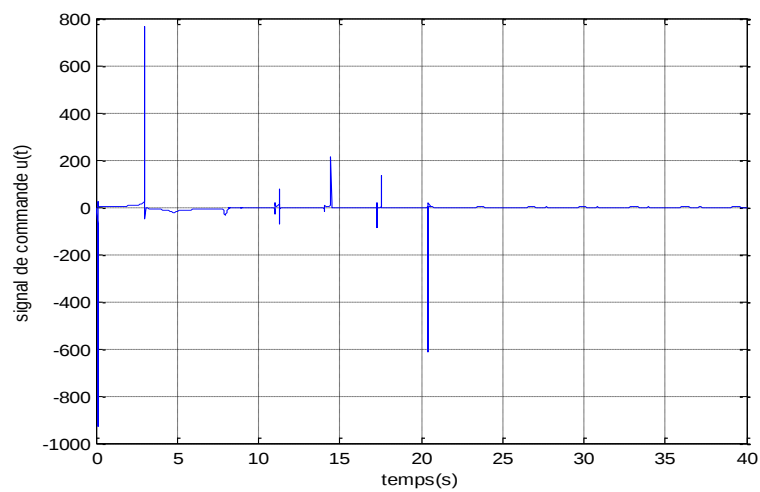
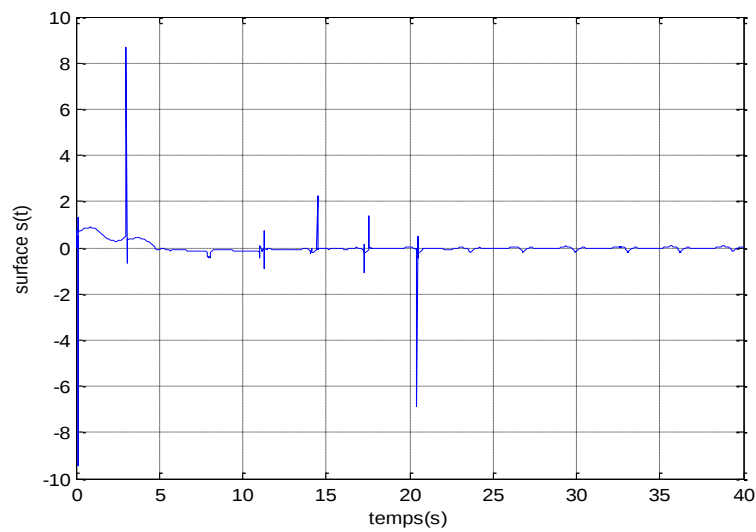
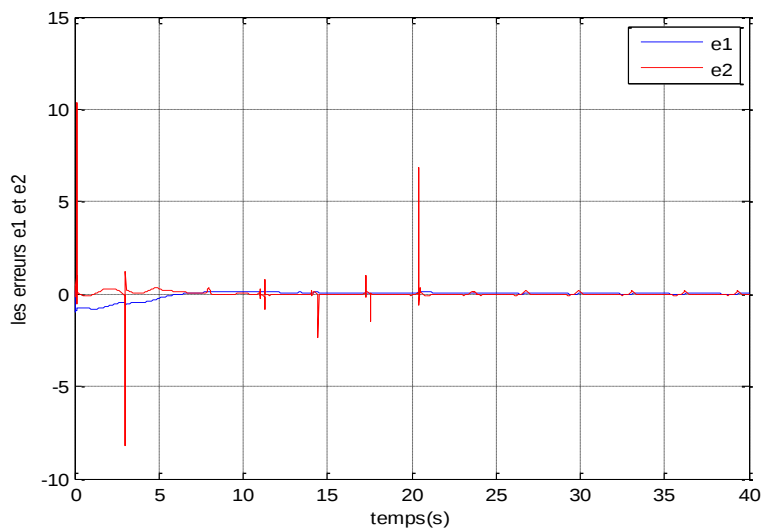


Fig. III.12 : Synchronisation des systèmes avec la commande étudiée avec PI.

(a). Trajectoires des états y_1 et x_1 .(b). Trajectoires des états y_2 et x_2 .(d). Signal de commande $u(t)$.

(c). Surface $S(t)$.(e). Erreurs $e1(t)$ et $e2(t)$.**Fig. III.13** : Résultats de simulation avec la loi de commande étudiée avec PI.

Commentaires

- On note que la poursuite de la trajectoire désirée soit assurée avec une précision bien définie (figures (III.3, III.4.a, b, - III.6, III.7.a, b)).
- Le phénomène de Chattering (figure (III.2.e)) est éliminé par la commande proposée (figure (III.3.e)).
- D'après les figures (III.2.e - III.3.e - III.4.e), en présence des perturbations externes, la commande reste efficace où les trajectoires réelles convergent vers les trajectoires désirées.

III.3. Introduction à la commande adaptative floue par mode glissant des systèmes non linéaire d'ordre fractionnaire avec un signe de gain inconnu.

III.3.1. Position du problème :

Considérons le système non linéaire SISO d'ordre fractionnaire comme suit [16]:

$$\begin{cases} x^{(nq)} = f(x, t) + g(x, t)u + d(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.24)$$

où

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T$ est le vecteur d'état de ce système, $u \in R$ est l'entrée de commande du système, $y \in R$ est sa sortie,

$f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont des fonctions non linéaires continues inconnues, $d(t)$ présente la perturbation externe inconnue.

Ou encore,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B[f(x, t) + g(x, t)u + d(t)] \\ y = C^T x_1. \end{cases} \quad (3.25)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_1 - k_2 - k_3 - k_4 \dots - k_{(n-1)} - k_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$e = y - y_d = [e, e^{(q)}, \dots, e^{((n-1)q)}]^T \in R^n$, est le vecteur des erreurs de poursuite.

$$e^{(nq)} + k_1 e^{((n-1)q)} + \dots + k_n e = 0 \quad (3.26)$$

l'équation d'état suivante est obtenue :

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + B[y_d^{(nq)} - f(x, t) - g(x, t)u - d(t)] \\ y = C^T e. \end{cases} \quad (3.27)$$

Ce qui implique $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$,

$$e^{(nq)} + k_1 e^{((n-1)q)} + \dots + k_n e = 0 \quad (3.28)$$

$K = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T \in R^n$ Vecteur choisir par le polynôme caractéristique $(A - BK^T)$ (Système stable).

En général, dans l'espace d'état de l'erreur la surface de glissement est définie par

$$s(x, t) = -(ke) = -(k_1 e + k_2 e^{(q)} + \dots + k_{n-1} e^{(n-2)q} + e^{(n-1)q}) \quad (3.29)$$

$$s(x, t) s^{(q)}(x, t) \leq -\eta, \text{ où } \eta > 0 \quad (3.30)$$

où $\underline{k} = [k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, 1] \in R^n$ où les k_i sont toutes des réelles et sont choisies de telle sorte que $h(r) = \sum_{i=1}^n k_i r^{(i-1)q}$, $k_n = 1$ est un polynôme Hurwitz où r est l'opérateur de Laplace.

Le problème de poursuite sera considéré comme le vecteur d'état d'erreur e qui reste sur la surface de glissement $s(x, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Le processus de commande en mode glissant peut être classé en deux phases, la phase approchante avec $s(x, t) \neq 0$ et la phase de glissement avec $s(x, t) = 0$ pour l'erreur initiale $e(0) = 0$. Afin de garantir que la trajectoire du vecteur d'état d'erreur e se traduira à partir de la phase approchante de la phase de glissement, la condition suffisante [20], [21]

L'objectif de conception consiste à déterminer une loi de commande u pour orienter la sortie du système vers le signal de référence y_r , tout en assurant la bornitude de tous les signaux impliqués dans le système en boucle fermée.

Comme dans [4],[15] et [17], les hypothèses suivantes sont considérées :

Hypothèse 3.1 : Le gain de commande $g(x, t)$ est non nul et de signe inconnu. Ainsi, il est strictement positif ou strictement négatif.

Hypothèse 3.2: La trajectoire de référence $y_d(t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre (nq) sont connues, continues et bornées.

Hypothèse 3.3 : La perturbation externe est bornée $|d(t)| \leq D$ avec D est une constante positive inconnue.

Pour estimer le signe de gain de commande, la fonction Nussbaum $N_1(\zeta) = \zeta^2 \cos(\zeta)$, sera employée pour commander les systèmes non linéaires affines.

Deux types de lois de commande doit être tirés séparément pour ces deux phases décrites ci-dessus. Dans la phase de glissement, elle implique $s(x, t) = 0$ et $s^{(q)}(x, t) = 0$. [22]

Afin de forcer la dynamique du système à rester sur la surface de glissement, la commande équivalente $\bar{u}$ peut être calculée comme suit,

On se basant sur l'approche de la linéarisation par retour d'état, où les fonctions $f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont connues, $d(t)=0$ et l'état x est disponible pour la mesure, la commande idéale peut être choisie comme suit:

$$\begin{aligned}
 s^{(q)} &= - \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + e^{(nq)} \right) = - \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + y_d^{(nq)} - y^{(nq)} \right) \\
 &= - \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} - f(x, t) - g(x, t) \bar{u} \right) - y_d^{(nq)} \\
 &= - \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} \right) + f(x, t) + g(x, t) \bar{u} - y_d^{(nq)} = 0
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Par conséquent, la commande équivalente peut être obtenue comme

$$\bar{u} = \frac{1}{g(x, t)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} - f(x, t) + y_d^{(nq)} \right) \tag{3.32}$$

Au contraire, dans la phase approchante, $s(\underline{x}, t) \neq 0$ un type s'approche de contrôle u_{ap} doit être ajouté afin de satisfaire à la condition suffisante (3.3) et la commande par mode de glissement complète sera exprimée comme

$$u = \bar{u} - u_{ap} \quad , \quad u_{ap} = \psi_h \operatorname{sgn}(s) \tag{3.33}$$

Où $\psi_h \geq \eta > 0$.

$$u = \frac{1}{g(x, t)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} - f(x, t) + y_d^{(nq)} - \psi_h \operatorname{sgn}(s) \right) \tag{3.34}$$

De plus, la commande PI-fractionnaire a été utilisée pour éviter le problème de phénomène de chattering. L'entrée et la sortie du régulateur PI est sous la forme suivante [4] , [15] et [17]:

$$u_h = h(s|\theta_h) = \theta_{h_1} z_1 + \theta_{h_2} z_2 \tag{3.35}$$

où $z_1 = s$ et $z_2 = s^{(q)}$, θ_{h_1} et θ_{h_2} sont les gains de commande à concevoir.

L'équation (3.34) peut être réécrite comme :

$$h(s|\theta_h) = \xi(s) \theta_h^T \tag{3.36}$$

où $\xi^T(s) = [s, s^{(q)}] \in \mathcal{R}^2$ et $\theta_h = [\theta_{h_1}, \theta_{h_2}]^T \in \mathcal{R}^2$ est un vecteur des paramètres réglables.

Cependant, de les fonctions $f(x, t)$ et $g(x, t)$ ne sont pas connues et le vecteur d'état x n'est pas disponible pour la mesure, la commande idéale de mode glissement (3.32) ne peut pas être implémentée, Pour surmonter ces problèmes, les solutions proposées par la suite de ce chapitre et en utilisant des systèmes flous pour approximer les fonctions inconnues.

Nous remplaçons $f(x, t)$ et u_{ap} par les systèmes flous $f(x|\theta_f)$ et $h(s|\theta_h)$ sous les formes spécifiés comme, [21]

$$f(x|\theta_f) = \xi(x) \theta_f^T \quad \text{et} \quad h(s|\theta_h) = \xi(s) \theta_h^T \tag{3.37}$$

$\xi(x)$ et $\xi(s)$ sont des vecteurs des fonctions floues, θ_f et θ_h sont des vecteurs des paramètres ajustés par des lois d'adaptation.

On a $|h(s|\theta_h)| = D + \psi_h + \omega_{max}$ lorsque $s(x, t)$ se situe en dehors de la couche limite c.-à-d. $|s(x, t)| \geq \phi$, où ϕ est l'épaisseur de cette couche. [23].

Les vecteurs des paramètres optimaux θ_f^* et θ_h^* sont définis par

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f \in \Omega_f} [\sup_{x \in \Omega_x} |f(x|\theta_f) - f(x, t)|] \quad (3.38)$$

$$\theta_h^* = \arg \min_{\theta_h \in \Omega_h} [\sup_{x \in \Omega_x} |h(s|\theta_h) - u_{ap}|] \quad (3.39)$$

où Ω_f , Ω_g , Ω_h et Ω_x sont des ensembles de contraintes pour θ_f , θ_h et x respectivement et elles sont définies comme,

$$\Omega_f = \{\theta_f | |\theta_f| \leq M_f\}, \quad \Omega_h = \{\theta_h | |\theta_h| \leq M_h\} \quad \text{et} \quad \Omega_x = \{x | |x| \leq M_x\},$$

où M_f , M_h et M_x sont des constantes positives.

Les erreurs d'approximation sont données par :

$$\delta_f = f(x, t) - \xi(x)^T \theta_f^* \quad (3.40)$$

$$\delta_h = \psi_h - \xi(x)^T \theta_h^* \quad (3.41)$$

dans laquelle θ_f^* et θ_h^* sont les valeurs de paramètres optimaux définies par,

$$\phi_f = \theta_f^* - \theta_f \quad \text{et} \quad \phi_h = \theta_h^* - \theta_h.$$

Assurer le condition existent

$$s(x, t)s^{(q)}(x, t) \leq 0 \quad (3.42)$$

Le théorème suivant est proposé pour montrer les performances de contrôle dans le système en boucle fermée.[25]

La commande adaptative floue est Construite par :

$$u = N(\zeta) \left[k_i e^{(iq)} + \xi(x) \theta_f^T - y_d^{(nq)} - \psi_h \text{sgn}(s) \right] \quad (3.43)$$

$$\zeta^{(q)} = s \left[k_i e^{(iq)} + \xi(x) \theta_f^T - y_d^{(nq)} \right] \quad (3.44)$$

et les lois d'adaptation θ sont choisi comme suite :

$$\theta_f^{(q)} = -r_1 \theta_f + r_1 s \xi(x), \quad (3.45)$$

$$\theta_h^{(q)} = -r_2 \theta_h + r_2 g(x) N(\zeta) |s| \xi(x), \quad (3.46)$$

Tels que $|\delta_f s| \leq \varepsilon$, r_1 et r_2 sont des constantes positives.

$g'(x) = -g(x)$, alors la stabilité du système en boucle fermée peut être garantie.

III.3.2. Analyse de stabilité

$$V = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2r_1}\phi_f^T\phi_f + \frac{1}{2r_2}\phi_h^T\phi_h. \quad (3.47)$$

En prenant la dérivée (3.47) par rapport au temps, nous obtenons

$$\begin{aligned} V^{(q)} &= s s^{(q)} + \frac{1}{r_1}\phi_f^T\phi_f^{(q)} + \frac{1}{r_3}\phi_h^T\phi_h^{(q)}. \\ &= s \left(k_i e^{(iq)} + f(x) + g(x)u - y_d^{(nq)} \right) + \frac{1}{r_1}\phi_f^T\phi_f^{(q)} + \frac{1}{r_3}\phi_h^T\phi_h^{(q)}. \\ &= s(k_i e^{(iq)} + f(x) + g(x)N(\zeta) \left[k_i e^{(iq)} + \xi(x)\theta_f^T - y_d^{(nq)} - \psi_h \operatorname{sgn}(s) \right] - y_d^{(nq)} \\ &\quad - \xi(x)\theta_f^T + \delta_f) + \frac{1}{r_1}\phi_f^T\phi_f^{(q)} + \frac{1}{r_3}\phi_h^T\phi_h^{(q)}. \\ &= s \left(k_i e^{(iq)} + \xi(x)\theta_f^T - y_d^{(nq)} - g(x)N(\zeta)\psi_h \operatorname{sgn}(s) + g(x)N(\zeta) \left[k_i e^{(iq)} + \xi(x)\theta_f^T - y_d^{(nq)} \right] \right. \\ &\quad \left. - \xi(x)\theta_f^T + \delta_f \right) + \frac{1}{r_1}\phi_f^T\phi_f^{(q)} + \frac{1}{r_3}\phi_h^T\phi_h^{(q)}. \\ &= s([g'(x)N(\zeta) + 1] \left[k_i e^{(iq)} + \xi(x)\theta_f^T - y_d^{(nq)} \right] - \xi(x)\theta_f^T + \delta_f - g(x)N(\zeta)\psi_h \operatorname{sgn}(s)) + \\ &\quad \frac{1}{r_1}\phi_f^T\phi_f^{(q)} + \frac{1}{r_3}\phi_h^T\phi_h^{(q)}. \end{aligned}$$

où $\phi_f^{(q)} = -\theta_f^{(q)}$ et $\phi_h^{(q)} = -\theta_h^{(q)}$.

$$\begin{aligned} V^{(q)} &= [g'(x)N(\zeta) + 1]\zeta^{(q)} - \xi(x)s\theta_f^T + \delta_f s - \frac{g(x)N(\zeta)\psi_h^*}{|s|}s^T s - \phi_h g(x)N(\zeta)|s|\xi(x) + \\ &\quad \frac{1}{r_1}\phi_f^T\phi_f^{(q)} + \frac{1}{r_3}\phi_h^T\phi_h^{(q)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

En utilisant (3.45) et (3.46), nous pouvons obtenir

$$V^{(q)} = -\frac{g(x)N(\zeta)\psi_h^*}{|s|}s^T s - \phi_f^T\phi_f^{(q)} - \phi_h^T\phi_h^{(q)} + \delta_f s + [g'(x)N(\zeta) + 1]\zeta^{(q)} \quad (3.49)$$

Les inégalités suivantes sont valables,

$$-\phi_f^T\phi_f \leq -\frac{1}{2}\phi_f^T\phi_f + \frac{1}{2}\|\theta_f^*\|^2. \quad (3.50)$$

$$-\phi_h^T\phi_h \leq -\frac{1}{2}\phi_h^T\phi_h + \frac{1}{2}\|\theta_h^*\|^2. \quad (3.51)$$

Et nous pouvons réécrire $V^{(q)}$ comme suit,

$$\begin{aligned} V^{(q)} &= -\frac{g(x)N(\zeta)\psi_h^*}{|s|}s^T s - \leq -\frac{1}{2}\phi_f^T\phi_f + \frac{1}{2}\|\theta_f^*\|^2 - \frac{1}{2}\phi_h^T\phi_h + \frac{1}{2}\|\theta_h^*\|^2 + \|\varepsilon\| + \\ &\quad [g'(x)N(\zeta) + 1]\zeta^{(q)}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Soit $\alpha = \min \left(\lambda_{\min} \left(-\frac{g(x)N(\zeta)\psi_h^*}{|s|} \right), \lambda_{\min} r_1, \lambda_{\min} r_2 \right)$ et $\beta = \frac{1}{2} \|\theta_f^*\|^2 + \frac{1}{2} \|\theta_f^*\|^2 + \|\varepsilon\|$.

L'inégalité (3.52) peut être exprimée comme,

$$V^{(q)} \leq -\alpha V + \beta + [g'N(\zeta) + 1]\zeta^{(q)}. \quad (3.53)$$

En multipliant les deux cotés par $e^{\alpha t}$, (3.53) réécrite comme suit,

$$V^{(q)} e^{\alpha t} + \alpha V e^{\alpha t} \leq \beta e^{\alpha t} + e^{\alpha t} [gN(\zeta) + 1]\zeta^{(q)}$$

$$\frac{d}{dt} (V(t) e^{\alpha t}) \leq \beta e^{\alpha t} + e^{\alpha t} [gN(\zeta) + 1]\zeta^{(q)}. \quad (3.54)$$

Avec l'intégration de (3.54) sur $[0, t]$, il résulte que

$$0 \leq V(t) e^{\alpha t} - V(0) \leq \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha} + \int_0^t [gN(\zeta) + 1] e^{\alpha \tau} \zeta^{(q)} d\tau$$

$$0 \leq V(t) \leq \frac{\beta}{\alpha} + \left[V(0) - \frac{\beta}{\alpha} \right] e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \int_0^t [gN(\zeta) + 1] e^{\alpha \tau} \zeta^{(q)} d\tau. \quad (3.55)$$

Notant que $0 < e^{\alpha t} < 1$ et $\frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha t} > 1$, alors, $\left[V(0) - \frac{\beta}{\alpha} \right] e^{-\alpha t} \leq V(0)$.

L'équation (3.55) devient,

$$0 \leq V(t) \leq \beta^* + e^{-\alpha t} \int_0^t [gN(\zeta) + 1] e^{\alpha \tau} \zeta^{(q)} d\tau. \quad (3.56)$$

Où $\beta^* = \frac{\beta}{\alpha} + V(0)$.

D'après le Lemme 1 (section 1.8.4), il peut être conclu de (3.53) que $V(t)$, $\zeta(t)$ et $\int_0^t gN(\zeta)\dot{\zeta} d\tau$ sont bornées, c.-à-d. e et θ_f sont aussi bornées. De (3.43), u est bornée. Alors, tous les signaux dans le système en fermée sont bornés.

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé la structure de commande adaptative floue par mode glissant des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire (un rappel sur la commande adaptative floue par mode glissant des systèmes non linéaire d'ordre fractionnaire avec un signe de gain connu et une introduction à la commande adaptative floue par mode glissant des systèmes non linéaire d'ordre fractionnaire avec un signe de gain inconnu). Cette structure de commande est une combinaison de la commande floue dont les performances sont incontestables et la commande par mode glissant qui présente des propriétés de simplicité et d'invariance par rapport aux incertitudes et perturbations externes.

La commande floue en mode glissant proposée a démontrée par simulation la robustesse en boucle fermée et a permis aussi de réduire le broutement inhérent au mode glissant.

En outre, les paramètres de la commande PI-fractionnaire peuvent être réglés en ligne par la loi d'adaptation. Le phénomène de Chattering dans la commande glissante a été éliminé et la convergence de l'erreur de poursuite vers zéro est assurée. Le système en boucle fermée est stable dans le sens de Lyapunov. La méthode proposée a été appliquée pour commander deux systèmes chaotiques (Duffing) de suivre une trajectoire de référence. Les résultats de simulation ont montrés que la commande proposée peut atteindre les performances souhaités.